Corso di fisica II

Prova scritta del secondo modulo del 28/07/08

Esercizio 1

Assegniamo per comodità un nome alle regioni:
A per $0 < r < R$
B per $R < r < 2R$
C per $2R < r < 5R$
D per $r > 5R$

Nella regione A il campo elettrico è nullo, poiché ci si trova all'interno di una sfera conduttrice.
Nella regione B con il teorema di Gauss si verifica immediatamente che

$$E_B(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Nella regione C, ovvero in presenza di un dielettrico e con una distribuzione di carica sulla superficie interna abbiamo:

$$E_C(r) = \frac{Q - 4\pi \cdot 4R^2\sigma}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r^2}$$

Infine nella regione D, di nuovo nel vuoto:

$$E_D(r) = \frac{Q - 4\pi \cdot 4R^2\sigma}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Per avere il valore del potenziale al centro della sfera possiamo integrare il campo elettrico dall'infinito fino all'interno della sfera conduttrice (qualsiasi punto al suo interno si trova allo stesso potenziale). Integriamo quindi sulle tre regioni D, C, B:

$$\phi(0) = \phi(R) = -\int_{\infty}^{5R} E_D dr - \int_{5R}^{2R} E_C dr - \int_{2R}^{R} E_B dr =$$

$$= \frac{Q - 4\pi \cdot 4R^2\sigma}{4\pi\varepsilon_0 5R} - \frac{Q - 4\pi \cdot 4R^2\sigma}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 5R} + \frac{Q - 4\pi \cdot 4R^2\sigma}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 2R} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{7}{10} + \frac{3}{10\varepsilon_r}\right) - \frac{4R\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{5} + \frac{3}{10\varepsilon_r}\right) = 32465V$$

Esercizio 2

Il movimento provoca la formazione di una *f.e.m.* nella spira per la variazione del flusso magnetico. La spira (e quindi anche il filo) risente di una forza netta a causa del gradiente del campo magnetico: infatti della spira solo i lati paralleli al filo subiscono la forza magnetica, ma, essendo a diverse distanze dal filo, il campo magnetico è diverso e quindi anche le forze. In questo modo la risultante non si annulla.

Il flusso del campo magnetico attraverso la spira si ottiene integrando il campo magnetico sull'area. Poiché in direzione parallela al filo il campo magnetico non varia, possiamo semplificare l'integrale a una dimensione. Chiamando r lo spostamento del filo dalla configurazione originaria:

$$\Phi(B) = \int_0^d \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{Id}{r+d+x} dx = \frac{\mu_0}{2\pi} Id \log\left(\frac{r+2d}{r+d}\right)$$

Per la f.e.m indotta scriviamo:

$$f.e.m = -\frac{d}{dt}\Phi(B) = \frac{\mu_0}{2\pi} Id^2 \frac{dr/dt}{(r+2d)(r+d)}$$

Per la legge di Ohm:

$$I = \frac{f.e.m}{R} = \frac{\mu_0}{2\pi R} Id^2 \frac{dr/dt}{(r+2d)(r+d)}$$

La forza magnetica netta è la differenza tra le forze magnetiche agenti sui lati di spira paralleli al filo:

$$F_{mag} = -\frac{\mu_0}{2\pi} I \cdot I_{indotta}\left(\frac{d}{r+d} - \frac{d}{r+2d}\right) = \left[\frac{\mu_0 Id^2}{2\pi(r+2d)(r+d)}\right]^2 \cdot \frac{v}{R}$$

Per quanto riguarda l'equazione del moto:

$$m\ddot{r} = F_{ext} - F_{mag}(r)$$

Si noti che la forza magnetica dovuta a correnti indotte si oppone sempre a un tentativo esterno di cambiare la configurazione del sistema (in caso contrario si creerebbero delle instabilità: la minima perturbazione esterna potrebbe letteralmente far schizzare via la spira).

Esistono anche degli effetti dissipativi dipendenti dalla velocità (NON RICHIESTI): per effetto Joule si ha una potenza dissipata $P=VI=P(r,v^2)$.

Se scriviamo $P = \frac{(f.e.m)^2}{R} = \frac{1}{R}\left(\frac{\mu_0}{2\pi R} Id^2 \frac{v}{(r+2d)(r+d)}\right)^2$ e deriviamo rispetto alla velocità:

$$F = \frac{dP}{dv} = \frac{1}{R}\left(\frac{\mu_0}{2\pi R}\frac{Id^2}{(r+2d)(r+d)}\right)^2 2v = \gamma \cdot v$$

Possiamo riscrivere l'equazione del moto $m\ddot{r} + \dot{r}\gamma - (F_{ext} - F_{mag}(r)) = 0$

La variazione di forza magnetica dipende solo dalla posizione. Posto $x = r/d$, possiamo porre:

$\frac{Id^2}{(r+2d)(r+d)} = \frac{1}{2}\frac{Id^2}{(2d)(d)}$ che ha come soluzione $r = 0.56\ d$. Con i dati proposti

$$t = \frac{0.56d}{v} = 112ms$$